Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas 3 (MA-1116)
3er Examen Parcial (35 %)
Septiembre-Diciembre 2023

Tipo Único

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. **(Total: 9 ptos.)** Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ la transformación lineal dada por

$$T(ax^2 + bx + c) = (15a + 16b - 9c)x^3 + (3a - b + c)x + 2c - 3b$$

   a) **(1 pto.)** Demuestre que T es una transformación lineal
   b) **(2 ptos.)** Encuentre la matriz de transformación A_T asociada en las bases canónicas
   c) **(2 ptos.)** Encuentre una base para el núcleo de T
   d) **(4 ptos.)** Si $\mathcal{B} = \{4x^2 + 3, -x^3 + 1, -x^2 - 3x, -x^2 + 2x\}$ es otra base, exprese $T(x^2 - x)$ en función de $\mathcal{B}$.

2. **(Total: 10 ptos.)** Sea V el espacio vectorial dado según

$$V = \{\boldsymbol{A} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}) \mid \boldsymbol{A} \text{ es triangular superior}\}$$

con producto interno[1] complejo $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \rangle = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}^\dagger \boldsymbol{A})$, y H un subespacio de V definido como

$$H = \{\boldsymbol{A} \in V \mid a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0,\ \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = 2a_{22}\}.$$

   a) Encuentre una base ortonormal para $H^\perp$.
   b) Sea $\boldsymbol{E} \in V$ tal que

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} i & 2i & -3 \\ 0 & -5i & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Encuentre $\boldsymbol{F} \in H$, $\boldsymbol{G} \in H^\perp$ tales que $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$.

[1] El símbolo † (daga) se usa para denotar a la matriz adjunta (también conocida como la matriz traspuesta conjugada). Es decir, $B^\dagger = \overline{B}^\top$.

3. **(Total: 10 ptos.)** Considere

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i & -\sqrt{38}i \\ -i & 2 & \sqrt{19} \\ \sqrt{38}i & -\sqrt{19} & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Determine todos los autovalores de la matriz A.

   b) Encuentre los autovectores correspondientes a cada autovalor de A.

   c) Muestre que A es diagonalizable y construya su forma diagonal $A = PDP^{-1}$.

4. **(2 ptos. c/u)** Determine si las siguientes proposiciones son **VERDADERAS** o **FALSAS**.

   a) Sea A una matriz idempotente de orden 3, tal que $\lambda_1 = 1$ es una raíz simple de la ecuación $\det(A - \lambda I_3) = 0$. Entonces, $\dim E_{\lambda_2=0} = 2$.

   b) Si T_A, $T_B : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ son aplicaciones lineales y $\operatorname{rango}(T_A) = 4$, $\operatorname{rango}(T_B) = 3$, entonces la nulidad de la composición es $\operatorname{nulidad}(T_A \circ T_B) \geq 2$.

   c) Para todo $k \in \mathbb{R}$ la matriz $\begin{pmatrix} 6 & -6i \\ ki & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

Solución

1. *a*) Empecemos por demostrar que T es una transformación lineal. Sean p, $q \in \mathbb{P}_2$, dados por
$$p(x) = ax^2 + bx + c, \quad q(x) = a'x^2 + b'x + c',$$
y $k \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria. Vea que
$$\begin{aligned} T(p) &= (15a + 16b - 9c)x^3 + (3a - b + c)x + 2c - 3b, \\ T(q) &= (15a' + 16b' - 9c')x^3 + (3a' - b' + c')x + 2c' - 3b'. \end{aligned}$$
Así, sumando término a término y agrupando,
$$\begin{aligned} T(p) + T(q) = &\left[15(a + a') + 16(b + b') - 9(c + c')\right] x^3 \\ &+ \left[3(a + a') - (b + b') + (c + c')\right] x + 2(c + c') - 3(b + b'). \end{aligned}$$
Observe como esta expresión es idéntica a $T(p+q)$. Finalmente, como consecuencia trivial de la distribución del producto $k \cdot p(x)$, se verifica también que $T(kp) = kT(p)$, y queda demostrado que T es una transformación lineal.

   b) Para encontrar la representación matricial de T sobre las bases canónicas de $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{P}_3$,
$$\mathcal{C}_{\mathbb{P}_2} = \left\{1,\, x,\, x^2\right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_{\mathbb{P}_3} = \left\{1,\, x,\, x^2,\, x^3\right\}$$
respectivamente, podemos explorar primero la acción de T sobre elementos de la base canónica de $\mathbb{P}_2$:
$$T(1) = -9x^3 + x + 2, \quad T(x) = 16x^3 - x - 3, \quad T(x^2) = 15x^3 + 3x.$$
Comparando los resultados con la base canónica $\mathcal{C}_{\mathbb{P}_3}$, obtenemos directamente que
$$A_T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & 16 & 15 \end{pmatrix}.$$
Recuerde que esta representación aplica sobre vectores coordenada en $\mathcal{C}_{\mathbb{P}_2}$ y resulta en vectores coordenada en $\mathcal{C}_{\mathbb{P}_3}$.

   c) El núcleo de A_T puede determinarse directamente encontrando el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 16 & 15 & 0 \end{array}\right).$$

Aplicando operaciones elementales por fila, el sistema puede ser reducido a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 16 & 15 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{reduc.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

y por tanto, el núcleo $\ker(A_T)$ es dado por

$$\ker(A_T) = \operatorname{gen}\left(\{\boldsymbol{v}\}\right), \quad \text{con} \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -9 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, como $\ker(A_T)$ es generado por un único vector, entonces

$$\mathcal{B}_{\ker} = \{\boldsymbol{v}\}$$

es una base para $\ker(A_T)$.

d) Sea $m(x) = x^2 - x$. Usando la representación en $\mathcal{C}_{\mathbb{P}_2}$, obtenemos

$$A_T[m]_{\mathcal{C}_{\mathbb{P}_2}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -9 & 16 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = [T(m)]_{\mathcal{C}_{\mathbb{P}_3}},$$

Y de aquí que

$$T(m) = x^3 + 4x + 3.$$

Ahora, para encontrar $[T(m)]_{\mathcal{B}}$ normalmente usaríamos la definición de $\mathcal{B}$, cuyos vectores pueden escribirse en términos de $\mathcal{C}_{\mathbb{P}_3}$ trivialmente, para construir una matriz P de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}_{\mathbb{P}_3}$, y luego invertir esa matriz para obtener el cambio de base de $\mathcal{C}_{\mathbb{P}_3}$ a $\mathcal{B}$. Esto involucraría calcular el determinante de una matriz 4×4 y luego hacer el cálculo de los cofactores correspondientes. En un examen parcial, muy posiblemente esto no sea la mejor inversión de tiempo. A continuación, mostramos una forma alternativa pero equivalente de efectuar dicho cambio de base, aprovechando la estructura de los vectores que conforman a $\mathcal{B}$.

Sean $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_3$, $\boldsymbol{w}_4 \in \mathbb{R}^4$ tales que

$$\boldsymbol{w}_1 = [4x^2 + 3]_{\mathcal{C}_{\mathbb{P}_3}}, \quad \boldsymbol{w}_2 = [-x^3 + 1]_{\mathcal{C}_{\mathbb{P}_3}},$$

$$\boldsymbol{w}_3 = [-x^2 - 3x]_{\mathcal{C}_{\mathbb{P}_3}}, \quad \boldsymbol{w}_4 = [-x^2 + 2x]_{\mathcal{C}_{\mathbb{P}_3}}.$$

Es decir,

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La estrategia a continuación será ir escribiendo uno por uno los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ como combinación lineal de los $\boldsymbol{w}_i$ de forma sucesiva, empezando primero por las combinaciones más obvias. Por ejemplo, vea que

$$\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{5}\left(\boldsymbol{w}_4 - \boldsymbol{w}_3\right),$$

y por consiguiente, usando la relación anterior,

$$\boldsymbol{e}_3 = 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{w}_4 = -\frac{1}{5}\left(3\boldsymbol{w}_4 + 2\boldsymbol{w}_3\right).$$

Luego,

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{w}_1 - 4\boldsymbol{e}_3\right) = \frac{1}{3}\boldsymbol{w}_1 + \frac{4}{5}\boldsymbol{w}_4 + \frac{8}{15}\boldsymbol{w}_3$$

y

$$\boldsymbol{e}_4 = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{w}_2 = \frac{1}{3}\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2 + \frac{4}{5}\boldsymbol{w}_4 + \frac{8}{15}\boldsymbol{w}_3.$$

El punto clave de éstos cálculos es que los vectores $\boldsymbol{w}_i$ son los que usaríamos para construir la matriz de cambio de base P de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}_{\mathbb{P}_3}$. Sin embargo, en vez de intentar invertir dicha matriz para determinar el cambio contrario, escribir los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ en término de estos vectores coordenada permite conseguir la representación deseada mediante una combinación lineal de los vectores coordenada. Empleando estos resultados y agrupando los términos comunes respecto a los $\boldsymbol{w}_i$, obtenemos

$$\begin{aligned}
[T(m)]_{\mathcal{C}_{\mathbb{P}_3}} &= 3\boldsymbol{e}_1 + 4\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_4, \\
&= \left(1 + \frac{1}{3}\right)\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2 + \left(\frac{8}{5} - \frac{4}{5} + \frac{8}{15}\right)\boldsymbol{w}_3 + \left(\frac{12}{5} + \frac{4}{5} + \frac{4}{5}\right)\boldsymbol{w}_4, \\
&= \frac{4}{3}\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2 + \frac{4}{3}\boldsymbol{w}_3 + 4\boldsymbol{w}_4.
\end{aligned}$$

Esta es la representación sobre $\mathcal{B}$ que se deseaba encontrar, puesto que los coeficientes de los vectores $\boldsymbol{w}_i$ son las entradas del vector coordenada para $T(m)$ sobre

$\mathcal{B}$. Finalmente

$$[T(m)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1 \\ 4/3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Como última observación, note que a partir de esta representación es posible recuperar $T(m)$ y verificar que nuestro cálculo es correcto:

$$\frac{4}{3}\left(4x^2+3\right) - \left(-x^3+1\right) + \frac{4}{3}\left(-x^2-3x\right) + 4\left(-x^2+2x\right) =$$
$$x^3 + \left(\frac{16}{3} - \frac{4}{3} - 4\right)x^2 + (8-4)\,x + (4-1) = x^3 + 4x + 3.$$

2. *a*) Determinar una base ortonormal de $H^{\perp}$ únicamente a partir de la definición de H no será posible. No existe ninguna condición obvia o evidente que nos permita rápidamente caracterizar el conjunto de vectores[2] $\boldsymbol{X} \notin H$. Así, para determinar un conjunto generador (y eventualmente una base) para $H^{\perp}$, tomemos como primer objetivo construir el operador de proyección ortogonal sobre H, Proj_H. Luego, calcular una base ortonormal para $H^{\perp}$ será cuestión de determinar una base para $\ker(\mathrm{Proj}_H)$, y posiblemente ortonormalizar empleando el procedimiento de Gram-Schmidt.

Sea $\boldsymbol{A} \in H$ con $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$. De acuerdo con la definición de V, obtenemos inmediatamente que $a_{21} = a_{31} = a_{31} = 0$. Pero además, $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = a_{11} + a_{22} = a_{33} = 2a_{22}$ y $a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0$. Así, $\boldsymbol{A}$ tiene la forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & -a_{12} - a_{13} \\ 0 & 0 & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$$

Vea que solo cuatro de las entradas de $\boldsymbol{A}$ son libres de escoger, y que $\boldsymbol{A}$ puede descomponerse como

$$\boldsymbol{A} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definiendo

[2] No olvide que en este caso particular los vectores son matrices en V. La negrita indica, a menos que se indique lo contrario, un elemento del espacio vectorial correspondiente

$$\boldsymbol{S}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{S}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{S}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obtenemos que

$$H = \operatorname{gen}\left(\{\boldsymbol{S}_1,\, \boldsymbol{S}_2,\, \boldsymbol{S}_3,\, \boldsymbol{S}_4\}\right),$$

y como las matrices $\boldsymbol{S}_i$ son linealmente independientes entonces forman una base para H. Sin embargo, para poder emplear esta base en la construcción de un operador de proyección ortogonal, los elementos $\boldsymbol{S}_i$ de la base deben ser, al menos, mutuamente ortogonales. Por ejemplo, note que

$$\langle \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3 \rangle = 1,$$

y por tanto esta base debe ser ortogonalizada primero. Para ello, apliquemos el procedimiento de Gram-Schmidt a $\mathcal{B}$ y definamos

$$\boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{S}_1, \quad \boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{S}_2 - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{Q}_1}(\boldsymbol{S_2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}_3 = \boldsymbol{S}_3 - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{Q}_1}(\boldsymbol{S_3}) - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{Q}_2}(\boldsymbol{S_3}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}_4 = \boldsymbol{S}_4 - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{Q}_1}(\boldsymbol{S_4}) - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{Q}_2}(\boldsymbol{S_4}) - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{Q}_3}(\boldsymbol{S_4}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{Q}_1,\, \boldsymbol{Q}_2,\, \boldsymbol{Q}_3,\, \boldsymbol{Q}_4\}$$

forma una base ortogonal para V, y

$$\operatorname{Proj}_H(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{4} \operatorname{proj}_{\boldsymbol{Q}_i}(\boldsymbol{X}), \quad \boldsymbol{X} \in V.$$

Ahora, para determinar $\ker(\operatorname{Proj}_H)$ tenemos al menos dos estrategias disponibles. La primera consiste en calcular la acción de Proj_H sobre los elementos de la base canónica $\mathcal{C}$ de V, construir una representación matricial para Proj_H respecto a la base canónica, y usar dicha representación para calcular $\ker(\operatorname{Proj}_H)$. Puesto que $\dim V = 6$, y $\dim H = 4$, esto implicaría efectuar 24 proyecciones y luego resolver un sistema lineal homogéneo en seis variables. En otras circunstancias, esta estrategia seria la más directa para resolver el ejercicio, pero en un examen parcial podría tomar demasiado tiempo. Alternativamente, la segunda estrategia consiste en calcular la acción de Proj_H sobre un vector arbitrario $\boldsymbol{X} \in V$ efectuando solamente $\dim H = 4$ proyecciones, obteniendo de forma similar un sistema lineal homogéneo en seis variables. En un examen parcial, esta opción no solamente es más rápida sino además mucho menos propensa a errores aritméticos. Para espacios de baja dimensión, ambas estrategias tienen costos comparativos en términos de cómputo, pero para altas dimensiones siempre piense en opciones alternativas, y cual de todas sería la más eficiente respecto al tiempo invertido. De esta manera, sea $\boldsymbol{X} \in V$, $\boldsymbol{X} = (x_{ij})$ y considere

$$\mathrm{Proj}_H(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{proj}_{\boldsymbol{Q_i}}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{0}.$$

A continuación calcularemos las proyecciones sobre los $\boldsymbol{Q}_i$, por lo que serán útiles los siguientes resultados:

$$\langle \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_1 \rangle = \mathrm{Tr}(Q_1^\dagger Q_1) = 2, \quad \langle \boldsymbol{Q}_2, \boldsymbol{Q}_2 \rangle = 2,$$
$$\langle \boldsymbol{Q}_3, \boldsymbol{Q}_3 \rangle = \frac{3}{2}, \quad \langle \boldsymbol{Q}_4, \boldsymbol{Q}_4 \rangle = \frac{3}{2}.$$

Procediendo con las proyecciones,

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{Q}_1}(\boldsymbol{X}) = \frac{\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Q}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_1 \rangle}\boldsymbol{Q}_1 = \frac{x_{11} - x_{33}}{2}\boldsymbol{Q}_1, \quad \mathrm{proj}_{\boldsymbol{Q}_2}(\boldsymbol{X}) = \frac{x_{12} - x_{23}}{2}\boldsymbol{Q}_2,$$
$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{Q}_3}(\boldsymbol{X}) = \frac{2x_{13} - x_{12} - x_{23}}{3}\boldsymbol{Q}_3, \quad \mathrm{proj}_{\boldsymbol{Q}_4}(\boldsymbol{X}) = \frac{2x_{22} + x_{11} + x_{33}}{3}\boldsymbol{Q}_4,$$

y sumando sus resultados,

$$\mathrm{Proj}_H(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x_{11} + x_{22} - x_{33} & 2x_{12} - x_{13} - x_{23} & 2x_{13} - x_{12} - x_{23} \\ 0 & 2x_{22} + x_{11} + x_{33} & 2x_{23} - x_{12} - x_{13} \\ 0 & 0 & 2x_{33} + x_{22} - x_{11} \end{pmatrix}.$$

Luego, note que $\mathrm{Proj}_H(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{0}$ es equivalente al sistema lineal homogéneo dado por

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \text{respecto a} \quad \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix}.$$

Aplicando operaciones elementales por fila, el sistema puede ser reducido a

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{reduc.}} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, el núcleo de Proj_H es generado por vectores $\boldsymbol{X} \in V$ de la forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{12} \\ 0 & -x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 & x_{11} \end{pmatrix} \\ &= x_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + x_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Siguiendo un argumento similar al que dimos anteriormente para $\boldsymbol{A}$, los vectores

$$\boldsymbol{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R}_1,\, \boldsymbol{R}_2 \in V$$

forman una base para $H^{\perp}$ y, observando que $\langle \boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2 \rangle = 0$, obtenemos finalmente que

$$\mathcal{B}_{\perp} \left\{ \boldsymbol{K}_1,\, \boldsymbol{K}_2 \right\}, \quad \text{donde} \quad \boldsymbol{K}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \boldsymbol{R}_1, \quad \boldsymbol{K}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \boldsymbol{R}_2,$$

es una base ortonormal para $H^{\perp}$. Note como esta base tiene la dimensión correcta, pues se verifica que

$$\dim V = \dim H + \dim H^{\perp} = 4 + 2 = 6.$$

b) El objetivo del enunciado es calcular la descomposición ortogonal de $\boldsymbol{E}$. Así,

$$\boldsymbol{F} = \mathrm{Proj}_H(\boldsymbol{E}), \quad \boldsymbol{G} = \mathrm{Proj}_{H^{\perp}}(\boldsymbol{E}),$$

puesto que los operadores de proyección ortogonal naturalmente satisfacen

$$\boldsymbol{X} = \mathrm{Proj}_H(\boldsymbol{X}) + \mathrm{Proj}_{H^{\perp}}(\boldsymbol{X}), \quad \boldsymbol{X} \in V.$$

Procedamos a calcular las proyecciones:

- Proyección de $\boldsymbol{E}$ sobre H:

  Efectuando cada una de las proyecciones obtenemos

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{Q}_1}(\boldsymbol{E}) = \frac{1+i}{2}\boldsymbol{Q}_1, \quad \operatorname{proj}_{\boldsymbol{Q}_2}(\boldsymbol{E}) = \frac{-1+2i}{2}\boldsymbol{Q}_2,$$
$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{Q}_3}(\boldsymbol{E}) = -\frac{7+2i}{3}\boldsymbol{Q}_3, \quad \operatorname{proj}_{\boldsymbol{Q}_4}(\boldsymbol{E}) = -\frac{1+9i}{3}\boldsymbol{Q}_4.$$

  Juntando todos los resultados anteriores,

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{Proj}_H(\boldsymbol{E}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-3i & 2+4i & -7-2i \\ 0 & -1-9i & 5-2i \\ 0 & 0 & -2-6i \end{pmatrix}.$$

  Observe como $\boldsymbol{F} = (f_{ij})$ satisface $f_{12} + f_{13} + f_{23} = 0$ y $\operatorname{Tr}(\boldsymbol{F}) = 2f_{22}$, confirmando así que $\boldsymbol{F} \in H$.

- Proyección de $\boldsymbol{E}$ sobre $H^{\perp}$:
  De forma similar, efectuando cada una de las proyecciones correspondientes,

$$\operatorname{proj}_{\boldsymbol{K}_1}(\boldsymbol{E}) = \langle \boldsymbol{E}, \boldsymbol{K}_1 \rangle \boldsymbol{K}_1 = \frac{-1+6i}{3}\boldsymbol{R}_1, \quad \operatorname{proj}_{\boldsymbol{K}_2}(\boldsymbol{E}) = \frac{-2+2i}{3}\boldsymbol{R}_2.$$

  Juntando lo anterior,

$$\boldsymbol{G} = \operatorname{Proj}_{H^{\perp}}(\boldsymbol{E}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1+6i & -2+2i & -2+2i \\ 0 & 1-6i & -2+2i \\ 0 & 0 & -1+6i \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la descomposición ortogonal es dada por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}, \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1-3i & 2+4i & -7-2i \\ 0 & -1-9i & 5-2i \\ 0 & 0 & -2-6i \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1+6i & -2+2i & -2+2i \\ 0 & 1-6i & -2+2i \\ 0 & 0 & -1+6i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. *a*) Para determinar los autovalores de A, basta con calcular el polinomio característico de A,

$$\begin{aligned} C_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) &= \lambda^3 - 6\lambda^2 - 9\lambda + 14, \\ &= (\lambda - 7)(\lambda - 1)(\lambda + 2). \end{aligned}$$

De aquí que los autovalores de A son $\lambda = 7$, $\lambda = 1$, y $\lambda = -2$.

b) Los autoespacios correspondientes a cada autovalor pueden calcularse determinando $\ker(\lambda I - A)$ para cada λ. Así,

- $\lambda = 7$:
  Considere
$$7I - A = \begin{pmatrix} 4 & -i & i\sqrt{38} \\ i & 5 & -\sqrt{19} \\ -i\sqrt{38} & \sqrt{19} & 6 \end{pmatrix}.$$
  Calcular $\ker(7I - A)$ equivale a encontrar el conjunto de soluciones al sistema lineal homogéneo
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -i & i\sqrt{38} & 0 \\ i & 5 & -\sqrt{19} & 0 \\ -i\sqrt{38} & \sqrt{19} & 6 & 0 \end{array}\right).$$
  Aplicando operaciones elementales por fila,
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -i & i\sqrt{38} & 0 \\ i & 5 & -\sqrt{19} & 0 \\ -i\sqrt{38} & \sqrt{19} & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{reduc.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 19 & 0 & i\left(5\sqrt{38} - \sqrt{19}\right) & 0 \\ 0 & 19 & \sqrt{38} - 4\sqrt{19} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$
  y por tanto el autoespacio E_7 es dado por
$$E_7 = \text{gen}\left(\{\boldsymbol{v}_7\}\right), \quad \boldsymbol{v}_7 = \begin{pmatrix} i\left(\sqrt{19} - 5\sqrt{38}\right) \\ 4\sqrt{19} - \sqrt{38} \\ 19 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda = 1$:
  Procediendo de forma similar,
$$I - A = \begin{pmatrix} -2 & -i & i\sqrt{38} \\ i & -1 & -\sqrt{19} \\ -i\sqrt{38} & \sqrt{19} & 0 \end{pmatrix}$$
  y reduciendo el sistema lineal homogéneo resultante, obtenemos que
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -i & i\sqrt{38} & 0 \\ i & -1 & -\sqrt{19} & 0 \\ -i\sqrt{38} & \sqrt{19} & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{reduc.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -i\left(\sqrt{19} + \sqrt{38}\right) & 0 \\ 0 & 1 & 2\sqrt{19} + \sqrt{38} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
  Por tanto,
$$E_1 = \text{gen}\left(\{\boldsymbol{v}_1\}\right), \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} i\left(\sqrt{19} + \sqrt{38}\right) \\ -2\sqrt{19} - \sqrt{38} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda = -2$:
  Por último,

$$-2I - A = \begin{pmatrix} -5 & -i & i\sqrt{38} \\ i & -4 & -\sqrt{19} \\ -i\sqrt{38} & \sqrt{19} & -3 \end{pmatrix},$$

  y reduciendo el sistema lineal homogéneo resultante, obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & -i & i\sqrt{38} & 0 \\ i & -4 & -\sqrt{19} & 0 \\ -i\sqrt{38} & \sqrt{19} & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{reduc.}} \left(\begin{array}{ccc|c} 19 & 0 & -i\left(\sqrt{19}+4\sqrt{38}\right) & 0 \\ 0 & 19 & 5\sqrt{19}+\sqrt{38} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

  De esta manera,

$$E_{-2} = \operatorname{gen}\left(\{\boldsymbol{v}_{-2}\}\right), \quad \boldsymbol{v}_{-2} = \begin{pmatrix} i\left(\sqrt{19}+4\sqrt{38}\right) \\ -5\sqrt{19}-\sqrt{38} \\ 19 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, $\boldsymbol{v}_7$, $\boldsymbol{v}_1$ y $\boldsymbol{v}_{-2}$ son los autovectores de A, y

$$\mathcal{B}_\lambda = \{\boldsymbol{v}_7,\, \boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_{-2}\}$$

es una base de autovectores de A para $\mathbb{R}^3$, en virtud de la independencia lineal de los autovectores.

c) Puesto que A posee una base de autovectores para $\mathbb{R}^3$, A es diagonalizable, y teniendo en cuenta los resultados anteriores podemos afirmar directamente que existe matrices P, D tales que

$$A = PDP^{-1}$$

y estas vienen dadas por

$$D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{pmatrix} i\left(\sqrt{19}-5\sqrt{38}\right) & i\left(\sqrt{19}+\sqrt{38}\right) & i\left(\sqrt{19}+4\sqrt{38}\right) \\ 4\sqrt{19}-\sqrt{38} & -2\sqrt{19}-\sqrt{38} & -5\sqrt{19}-\sqrt{38} \\ 19 & 1 & 19 \end{pmatrix}.$$

4. *a*) Para explorar si la afirmación es verdadera, podemos emplear dos resultados clave sobre las matrices idempotentes. Estas matrices están asociadas a operadores de proyección (no necesariamente ortogonales), y poseen propiedades muy importantes. Por ejemplo, es sabido que los autovalores de una matriz idempotente A solo pueden ser $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$.

A continuación, damos dos maneras de argumentar que $\dim E_{\lambda_2=0} = 2$.

- **Toda matriz idempotente es diagonalizable**

  Por tanto existe una base $\mathcal{B}_\lambda$ de autovectores de A que generan a $\mathbb{R}^3$. Como los únicos dos autovalores de A son $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$, entonces solo existen dos autoespacios correspondientes, $E_{\lambda_1=0}$ y $E_{\lambda_2=0}$. Es también conocido que los autovectores de distintos autoespacios son linealmente independientes entre sí, y como consecuencia

  $$E_{\lambda_1=0} \cap E_{\lambda_2=0} = \{\mathbf{0}\}.$$

  De aquí que[3]

  $$\mathbb{R}^3 = E_{\lambda_1=0} \oplus E_{\lambda_2=0}$$

  y $\dim \mathbb{R}^3 = \dim E_{\lambda_1=0} + \dim E_{\lambda_2=0}$. Finalmente,

  $$\dim E_{\lambda_2=0} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim E_{\lambda_1=0} = 3 - 1 = 2.$$

- **La traza de una matriz idempotente equivale a su rango**

  Nuevamente, como los únicos autovalores de una matriz idempotente son $\lambda = 0$ o $\lambda = 1$, entonces

  $$C_A(\lambda) = \lambda^{m_0}(\lambda - 1)^{m_1}, \quad \text{donde} \quad m_0 + m_1 = 3.$$

  Recordando que

  $$\mathrm{Tr}(A) = \sum_i m_i \cdot \lambda_i,$$

  donde m_i es la multiplicidad algebraica de λ_i, obtenemos

  $$\mathrm{Tr}(A) = m_1 \cdot 1 + m_0 \cdot 0 = m_1, \quad \text{y por ende} \quad \mathrm{rango}\,(A) = m_1.$$

  Luego, como

  $$\mathrm{rango}\,(A) + \mathrm{nulidad}\,(A) = \dim \mathbb{R}^3,$$

  entonces,

  $$\mathrm{nulidad}\,(A) = \dim(\ker(A)) = 3 - 1 = 2,$$

  dado que $m_1 = 1 = \dim(E_{\lambda_1=1})$, según lo indica el enunciado. Finalmente, observando que

  $$\ker(A) = E_{\lambda_2=0},$$

  se sigue directamente el resultado deseado,

  $$\dim(\ker(A)) = \dim(E_{\lambda_2=0}) = 2.$$

[3] Recuerde que $\mathcal{B}_\lambda$ genera a $\mathbb{R}^3$.

Ambos métodos coinciden en que $\dim(E_{\lambda_2=0}) = 2$, y podemos afirmar que la proposición es **VERDADERA**.

b) Empleando la información dada en el enunciado, podemos afirmar que

$$\text{nulidad}\,(T_A) = 1, \quad \text{y} \quad \text{nulidad}\,(T_B) = 2,$$

en virtud del teorema de rango-nulidad. Luego, note como cualquier vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^5$ que satisfaga $T_B(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$ (es decir, $\boldsymbol{v} \in \ker(T_B)$) también satisface $(T_A \circ T_B)(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$, pues

$$(T_A \circ T_B)(\boldsymbol{v}) = T_A\,(T_B(\boldsymbol{v})) = T_A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Así, se sigue directamente que

$$\dim(\ker(T_A \circ T_B)) \geq \dim(\ker(T_B)) = \text{nulidad}\,(T_B) = 2$$

y por ende la proposición es **VERDADERA**.

c) Sea

$$Q = \begin{pmatrix} 6 & -6i \\ ki & 1 \end{pmatrix}, \quad Q \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}).$$

Empleando el polinomio característico de Q, dado por

$$\begin{aligned} C_Q(\lambda) &= (\lambda - 6)(\lambda - 1) - 6k \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 6(1-k). \end{aligned}$$

obtenemos que los autovalores de Q resultan

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(7 - \sqrt{24k+25}\right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(7 + \sqrt{24k+25}\right).$$

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, las multiplicidades geométricas de sus autoespacios correspondientes E_{λ_1}, E_{λ_2} deben ser al menos 1 y coincidir con las multiplicidades algebraicas. De esta manera, tenemos garantizado que existe una base de autovectores para $\mathbb{R}^2$ y como consecuencia que Q es diagonalizable. Por último, solo queda verificar el caso $\lambda_1 = \lambda_2$, que sucede cuando $\sqrt{24k+25} = 0$. Es decir,

$$k = -\frac{25}{24}.$$

Para este valor de k,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{7}{2}$$

y el autoespacio correspondiente $E_{\frac{7}{2}}$ es dado por el conjunto de soluciones al sistema lineal homogéneo

$$\left(\begin{array}{cc|c} -60 & 144i & 0 \\ 25i & 60 & 0 \end{array}\right)$$

Aplicando operaciones elementales por fila, este sistema puede reducirse a

$$\left(\begin{array}{cc|c} -60 & 144i & 0 \\ 25i & 60 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{reduc.}} \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -12i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

y de aquí que

$$E_{\frac{7}{2}} = \operatorname{gen}\left(\{\boldsymbol{v}\}\right), \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 12i \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Como no existen suficientes autovectores en este caso para formar una base de $\mathbb{R}^2$, no es cierto que Q sea diagonalizable para todo $k \in \mathbb{R}$. Asi, la proposición es **FALSA**.

Este parcial fue digitalizado en LaTeX por **Samuel Alonso** para **GECOUSB**

Samuel Alonso
14-10028
Lic. en Física

gecousb.com.ve

Cualquier error en la resolución de los ejercicios, notificar a **alonso.smontenegro@gmail.com**